1174. 群ノ左右類ノ代表ニツイテ

岩村 聯, 中山 正 (名大)

集合ノ有限分割ニ於ル代表元ノ定理カラ、或ル群Gノ指数有限ナル部分群Hニツイテノ類分解ニ於テ左右ニ共通ノ代表元ノ系ガ選ベル事ハヨク知ラレテヰル (Zassenhaus, 9頁). 然シ指数ガ無限ノ場合ニツイテドコニモ何モ書イテナイ様ニ思フノデ考ヘテ見マシタ處, コノ場合ニハ一般ニハ定理ハ成立タナイ事ガ分リマシタノデ極ク簡単ナ事乍ラ御報告シマス。反例:

二元 a, b デ生成サレタ自由群Gヲ考ヘル。ココニトカラ出発シテ、

1) 積ヲツクル事　　2) 逆ヲトル事、

3) 左カラ a^{-1}, 右カラ b ヲ掛ケル事.

ヲ繰返シテ得ラレル元全体ヨリナル部分群ヲHトスル。サテ左側ノ類Ha, HbノAinuノ元 $a_1 = ha$, $b_1 = h'b$ ヲ考ヘルト $a_1^{-1}b_1 = a^{-1}(h^{-1}h')b$ デアルカラHノ 3)ノ性質カラ $\in H$ デアリ從ッテ a_1, b_1 ハHノ同一ノ右類ニ属スル。ヨッテ若シG, Hニツキ定理(左右共通代表系ノ選出)ガ成立ツトスレバ左類 Ha, Hb モ同一即チ $ab^{-1} \in H$ デナケレバナラヌ。然シ以下ノ如ク $ab^{-1} \notin H$ ガ云ヘテ從ッテ定理ガ成立タナイ事ガ知ラレル。ソノ証明デアルガ、Hノ各元ハ a, b ノ語トシテ表ハサレルガ、例ノ自明的変形ニヨリ標準形ニナホス:

$$x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \cdots\cdots x_n^{\varepsilon_n} \qquad (x_i = a \text{ 又ハ } b;\ \varepsilon_i = \pm 1)$$

コノ場合指数ノ和 $\sum \varepsilon_i = 0$ ナル事ハHノ形成 1) 2), 3)ト（自明的変形）トカラ明カデアルガ、更ニ

(*) ドコデ截ツテモ前半ニ於ル指数ノ和ハ $\leqq 0$, ナル性質ガアル。コレハ $\sum \varepsilon_i = 0$ カラ

(**) 後半ニ於ケル指数ノ和ハ $\geqq 0$ ト云フニ等シイ。而シテコノ (*) モHノ形成カラ見易イ。何者, 1)ノ積ニツイテ両標準形ヲナラベテ書イテツナギ目ノ xx^{-1}, $x^{-1}x$ 等ヲ消シテ行ケバ積ノ標準形ニナルガ、コノ xx^{-1} 等ヲ消ス前ニツキ (*) ノ性質ノナル事ヲ云ヘバ勿論後ニツイテモ成立ツ。然ルニナラベテ書イタモノデハ (*) ハ明カデアル。即チ截リ口ガ前因子ニアレバ前因子ノ (*), 後因子ニアレバソノ (**) ヲ考ヘレバヨク、ツナギ目ナラ自明、マタ(**)トノ同一カラ　2)ノ逆ニツイテモ保タレル。　3)ニツイテモ自明、カクテ (*)ハHノ元ニ一般ニ成立ツ。然ルニ ab^{-1} デハ (*) ハ成立タナイカラ $\notin H$. コレデ反例ガ出来タ。

<u>(注意)</u> 實ハ（角谷氏ガソウデアラウト云ハレタ様ニ）Hハ $\sum \varepsilon_i = 0$ デアリ且ツ(*)ノ成立ツ元ノ全体カラ成ル。何者, ソノ全体ヲ $\overline{H}$ トスレバ明カニ $H \leqq \overline{H}$ デアルガ、逆ヲ証明スルタメ $\overline{H}$ ノ元ノ長サニツイテノ歸納法ヲ行フ。$\overline{H}$ ノ任意ノ元

$$x_1^{-1} x_2^{\varepsilon_2} \cdots\cdots x_n^{+1} \qquad \text{（標準形）}$$

ヲ考ヘルニ若シ $x_2^{\varepsilon_2} \cdots\cdots x_{n-1}^{\varepsilon_{n-1}}$ ガ矢張リ $\overline{H}$ ニ属スレバ（n ヨリ短イ元ニハ主張ガ成立ツトスレバ）$\in H$ トナリ、従ツテモトノ元モ $\in H$ トナル（Hノ2),3)ヲ参照）、然シ若シ

サウデナイトスレバ $\varepsilon_2+\varepsilon_3+\cdots+\varepsilon_m>0$ ナル $m(<n)$ が存在スルワケデ、今 m ヲソノ様ナ最小ノモノトスル。然ラバ $\varepsilon_2+\varepsilon_3+\cdots\cdots+\varepsilon_m=1$ デアリ、m ノ最小性カラ容易ニ元

$$x_1^{-1}x_2^{\varepsilon_2}\quad\cdots\cdots\quad x_m^{\varepsilon_m}$$

ニツキ(*)が成立チ $\in\overline{H}$、従ツテ歸納法ノ仮定ニヨリ $\in H$

$x_{m+1}^{\varepsilon_{m+1}}\cdots\cdots x_n^{+1}$ モ $\in\overline{H}$ 従ツテ $\in H$. 故ニ矢張リ我々ノ元ガ $\in H$ トナル。(コノ証明ハ a, b ヲ京都ニ於ル東行及ビ北上ト思ヘバ考ヘ易イ。$\overline{H}$ ノ元トハ都心カラ南西京區ノミヲ通ツテ對角線 ╲ ニ終ル途、上ノ証明ニ於ルニツノ場合ハ途中對角線ニ立寄ルカ否カノ區別デアル。)

—以 上—